SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

C. PARENTI

OPERATORI A CARATTERISTICHE DOPPIE REALI

10 MARZO 1988

1. INTRODUZIONE

All'inizio degli anni '70 Hörmander (cfr. [Hö, Vol. 4, Cap. XXVI]) ha dimostrato questo ormai classico risultato: se P è un operatore pseudodifferenziale classico su un aperto $X \subset R^n$ con simbolo principale $p(x,\xi)$ reale $((x,\xi) \in T^*X\backslash o)$ e se si ha:

$$(1.1) \qquad dp \neq 0 \quad \text{su } T^*X\backslash 0,$$

allora per ogni distribuzione $u \in \mathscr{D}'(X)$ l'insieme $WF(u)\backslash WF(Pu)$ è contenuto in $p^{-1}(o)$ ed è invariante per il flusso e^{tH_p} definito dal campo vettoriale hamiltoniano $H_p = \sum_{j}^{n}\left(p'_{\xi_j}\,\partial_{x_j} - p'_{x_j}\,\partial_{\xi_j}\right)$. Ciò vuol dire che se per un $\rho \in T^*X\backslash 0$ si ha $\rho \in WF(u)\backslash WF(Pu)$ e se $\gamma(t;\rho)$ indica la curva integrale di H_p per ρ (i.e. $\frac{d}{dt}\gamma(t;\rho) = H_p(\gamma(t;\rho))$, $\gamma(0;\rho) = \rho$) allora: $\gamma(t;\rho) \in WF(u)\backslash WF(Pu)$ per tutti i t di un opportuno intervallo aperto (massimale) contenente 0.

Il risultato enunciato è in realtà microlocale nel senso che se la condizione (1.1) è soddisfatta solo su un aperto conico $V \subset T^*X\backslash o$ allora vale il risultato di propagazione per $(WF(u)\backslash WF(Pu)) \cap V$.

Aggiungo che dall'informazione sulla propagazione delle singolarità si deducono con metodi di pura analisi funzionale risultati di risolubilità locale per l'equazione Pu = f. Ad esempio, non è difficile provare che se K è un compatto di X e se nessuna curva integrale massimale di H_p è contenuta in K, allora $N(K) = \{u \in \mathscr{E}'(K) \mid P^*u = 0\} \subset C_0^\infty(K)$ ed è finito dimensionale. Inoltre, se $f \in H^s_{loc}(X)$, $s \in R$, ed f è ortogonale ad N(K) allora esiste $u \in H^{s+m-1}_{loc}(X)$ (m = ord P) tale che Pu = f in un intorno di K.

E' naturale domandarsi cosa succede se la condizione (1.1) è violata e, precisamente, com'è fatto $WF(u)\backslash WF(Pu)$ vicino a punti di $T^*X\backslash o$ dove dp = 0.

Questo problema è stato affrontato da numerosi autori sotto diverse ipotesi per P. Vorrei qui cercare di dare un'idea di alcuni dei principali risul

tati in questa direzione. Dico subito che manca ancora un risultato "definitivo".

In particolare vorrei porre l'accento su due aspetti importanti della questione:

1. La geometria delle curve integrali di H_p.
2. Il ruolo dei termini d'ordine inferiore nel simbolo di P.

Come vedremo il primo punto è di gran lunga il più complesso e tocca questioni profonde della teoria dei sistemi dinamici.

2. GEOMETRIA DELLE CARATTERISTICHE

Sia dunque P un O.P.D. (classico e proprio) d'ordine m su $X \subset R^n$ con simbolo $\sigma(P) \sim p_m + p_{m-1} + \dots$ (p_{m-j} positivamente omogenea di grado m-j in ξ, $j \geq 0$). Per comodità scriviamo $p_m = p$; poniamo

$$\Sigma = \{(x,\xi) \in T^*X\backslash o \mid p(x,\xi) = 0,\ dp(x,\xi) = 0\}$$

e supporremo $\Sigma \neq \emptyset$. Per ogni $\rho \in \Sigma$ indichiamo con $F(\rho)$ la matrice fondamentale di p in ρ, i.e. la mappa $F(\rho) : T_\rho T^*X \to T_\rho T^*X$ definita da:

$$\sigma(v,F(\rho)v') = \langle \mathrm{Hess}\, p(\rho)v,\ v' \rangle \qquad (2.1)$$

dove $\sigma = \sum_{i}^{n}{}_j\, d\xi_j \wedge dx_j$ è la 2-forma canonica su T*X.

Supponiamo soddisfatta l'ipotesi seguente:

H_1) Σ è una sottovarietà (conica) C^∞ di T*X, di codimensione fissata ≥ 1, ed inoltre:

i) $T_\rho\Sigma = \ker F(\rho)$, $\forall \rho \in \Sigma$.

ii) La 1-forma $\omega = \sum_{i}^{n} \xi_j dx_j$ non è nulla su $T\Sigma$

iii) La restrizione di σ a Σ ha rango costante, i.e.

$$(T_\rho \Sigma \cap (T_\rho \Sigma)^\sigma)$$

è costante per ogni $\rho \in \Sigma$.

Osserviamo che per un noto risultato (cfr.[Hö, Vol. 3, Th. 21.2.4]), le ipotesi ii) ed iii) equivalgono a dire che per ogni $\rho \in \Sigma$ esistono un intorno conico V di ρ ed una trasformazione canonica omogenea $\chi : V \to T^*(R^k_{x'} \times R^\ell_{x''} \times R^{n-(k+\ell)}_y)\backslash 0$, con $k+2\ell$ = codim Σ e $2(n-k-\ell) = \text{rg}\, \sigma|_\Sigma$, per cui si ha:

$$(2.2) \qquad \chi(V \cap \Sigma) = \{(x',x'',y;\xi',\xi'',\eta) \in \chi(V) \mid \xi' = 0,\ x'' = \xi'' = 0\}.$$

Al modello microlocale (2.2) ci si potrà sempre ricondurre quando necessario.

Si noti che la condizione i) implica che gli zeri di p in Σ sono doppi; precisamente, poiché $\ker F(\rho) = \ker \text{Hess}\, p(\rho)$, nello spazio normale a Σ, $N\Sigma = T(T^*X)\backslash T\Sigma$, resta univocamente definita una forma quadratica non degenere:

$$(2.3) \qquad q_\rho(v) = \langle \text{Hess}\, p(\rho)v, v\rangle \quad , \quad v \in N_\rho \Sigma.$$

Faremo l'ipotesi seguente:

H_2) La forma q_ρ ha ν_+(risp. ν_-) autovalori >0 (risp. <0) contati con la loro molteplicità, con $\nu_\pm$ indipendenti da $\rho \in \Sigma$.

Si noti che $\nu_+ + \nu_-$ = codim Σ.

Quanto agli zeri semplici di p, supposto per semplicità che Σ sia connessa, indichiamo con Σ' la componente connessa di $p^{-1}(0)$ che contiene Σ.

Non è difficile vedere che $\Sigma'\backslash\Sigma \neq \emptyset$ se e solo se ν_+ e ν_- sono entrambi ≥ 1. In effetti se $\nu_-=0$ (e solo allora) si ha $p \geq 0$ vicino a Σ e di più

(2.4) $$p(x,\xi) \approx |\xi|^m d_\Sigma(x,\xi)^2,$$

dove

(2.5) $$d_\Sigma(x,\xi) = \inf_{(x',\xi')\in\Sigma} (|x-x'|^2 + |\xi/_{|\xi|} - \xi'|^2)^{1/2}.$$

(Se $\nu_+=0$ allora $-p$ è come sopra).

I casi largamente più studiati sono i seguenti:

a) $\nu_-=0$, i.e. $p\geq 0$ ed è trasversalmente ellittico rispetto a Σ (cioè p è nullo esattamente al 2° ordine su Σ).

b) $\nu_-=1$ e $\nu_+\geq 1$. In tal caso poiché la forma quadratica q_ρ è strettamente iperbolica, non è difficile vedere che p è microiperbolico in $\rho\in\Sigma$ rispetto ad ogni direzione che stia nel cono di iperbolicità di q_ρ.

Il caso a) è naturalmente connesso a questioni di ipoellitticità di P vicino a Σ (cfr.[Hö, Vol. 2, Cap. XXII]); l'ipoellitticità dipende allora dai termini d'ordine inferiore in P.

Il caso b), e più restrittivamente il caso in cui p sia debolmente iperbolico, hanno fatto oggetto di molti lavori di alcuni dei quali farò menzione più avanti.

Se supponiamo $\nu_\pm \geq 1$ e (per semplicità) $\Sigma'=p^{-1}(0)$, il problema geometrico cui siamo interessati è il seguente:

(*) Esistono curve integrali di H_p, contenute in $p^{-1}(0)\setminus\Sigma$, che abbiano punti limite in Σ?

Perché questo problema è importante? Sappiamo già che fuori di Σ la propagazione del WF ha luogo sulle curve integrali di H_p (in $p^{-1}(0)$), come conseguenza del risultato di Hörmander citato nell'introduzione. E' abbastanza naturale allora congetturare che se le curve integrali di H_p si mantengono "discoste" da Σ, la

eventuale propagazione delle singolarità su Σ non sarà influenzata da ciò che accade fuori di Σ.

Il problema (*) è purtroppo terribilmente complicato, almeno nella generalità in cui è formulato.

Esempi anche molto semplici mostrano che in generale la risposta dipende non solo da $F(\rho)$, cioè dai termini del 2° ordine dello sviluppo di Taylor di p vicino a Σ, ma anche dai termini d'ordine superiore (e, sfortunatamente, spesso da tutti i termini della serie di Taylor).

A parziale compenso dobbiamo però ricordare che se siamo interessati a studiare $(WF(u)\setminus WF(Pu))\cap V$, V essendo un aperto conico, siano autorizzati a modificare P (ed in particolare p) fuori di V, cioè se $P \sim P'$ su V, vale a dire $WF(P-P')\cap V = \emptyset$, allora $(WF(u)\setminus WF(Pu))\cap V = (WF(u)\setminus WF(P'u))\cap V$.

Per entrare un po' nel dettaglio dobbiamo ricordare qualcosa sulla struttura della matrice fondamentale $F(\rho)$.

In coordinate (x,ξ) si ha:

$$F(\rho) = \begin{pmatrix} p''_{x\xi}(\rho) & p''_{\xi\xi}(\rho) \\ -p''_{xx}(\rho) & -p''_{x\xi}(\rho)^t \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

(dove $p''_{x\xi}(\rho) = (\frac{\partial^2 p}{\partial\xi_h \partial x_k}(\rho))_{h,k=1,\dots,n}$)

L'antisimmetria di $F(\rho)$ rispetto a σ fa si che se λ è un autovalore di $F(\rho)$ allora anche $-\lambda$, $\bar{\lambda}$ e $-\bar{\lambda}$ sono autovalori di $F(\rho)$ con la stessa molteplicità di λ (in particolare la molteplicità dell'autovalore nullo è pari). Per questo si veda ad es. [Duist, Cap. 3].

L'esperienza insegna che i due casi seguenti sono qualitativamente assai diversi:

Caso 1. $sp(F(\rho)) \subset i\mathbb{R}$
Caso 2. $\exists\lambda \in sp(F(\rho))$, $Re\lambda \neq 0$

Cominciamo coll'esaminare il Caso 1. Più precisamente supponiamo soddisfatta la condizione seguente:

$H_3)$ 1. $sp(F(\rho))\subset i\mathbb{R}$, $\forall\rho\in\Sigma$. Inoltre se $V_\lambda = \ker(F(\rho)-i\lambda)^{N_\lambda}$, $\lambda>0$, e $W_+ = \bigoplus_{\lambda>0} V_\lambda$, la forma quadratica $W_+ \ni v \to \frac{1}{i}\,\sigma(v,\bar{v})$ è definita positiva.

2. $\ker F(\rho)^2 = \ker F(\rho)^3$, $\forall\rho\in\Sigma$.

Sotto le ipotesi H_1, $H_2)$, $H_3)$è possibile provare che esiste un modello microlocale della forma (2.2) per Σ e che in tale modello p si scrive nella forma (supponendo com'è consentito m = 2):

(2.7) $$p(x,\xi) = \frac{1}{2}\langle B(x',y,\eta)\xi',\xi'\rangle + \frac{1}{2}\langle A(x',y,\eta)(\xi''+ix''|\eta|),\xi''-ix''|\eta|\rangle + |\xi|^2 O(d_\Sigma(x,\xi)^3),$$

dove B (risp. A) è una matrice $k\times k$ (risp. $\ell\times\ell$) reale simmetrica (risp. complessa autoaggiunta) invertibile, dipendente in modo C^∞ da x',y,η e positivamente omogenea di grado 0 in η. Inoltre

i. $A = A^*>0$

ii. $B = {}^tB$ e $\forall(x',y,\eta),\eta\neq 0$, $B(x',y,\eta)$ ha k_+ (risp. k_-) autovalori >0 (risp. <0) con $k_++k_-=k$, $k_-=\nu_-$, $k_++\ell=\nu_+$

Esempio tipico è il seguente:

(2.7') $$P(x,\xi) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_-}\xi_j'^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=k_-+1}^{k}\xi_j'^2 + \sum_{j=1}^{\ell}\mu_j(\xi_j''^2+x_j''^2|\eta|^2),\quad \mu_j>0,$$

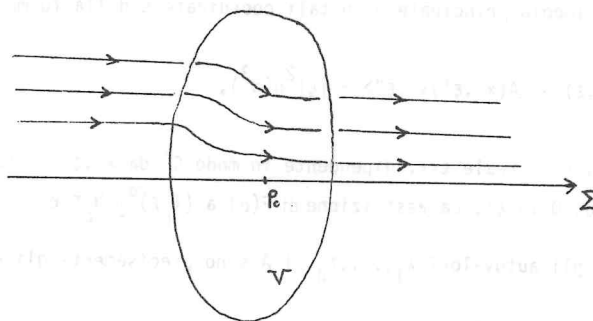
in cui $sp(F) = \{0, \pm i\mu_1,\ldots,\pm i\mu_\ell\}$.

Si noti che non solo è impossibile eliminare in generale il termine

$O(d_\Sigma^3)$ in (2.7), ma è anche impossibile ridursi al modello (2.7)' (almeno se $\ell>1$).

E' allora possibile dimostrare il risultato seguente:

Teorema 1. Nell'ipotesi H_1),H_2),H_3) per ogni $\rho_o \in \Sigma$ esistono un intorno conico V di ρ_o ed un simbolo reale $p_V \in S^2(T^*X\backslash o)$ coincidente con p su V per cui le curve integrali di H_{p_V} uscenti da punti di $(p^{-1}(0)\backslash\Sigma)\cap V$ non hanno punti limite su Σ.

Per una dimostrazione rimandiamo a Pe-So [6] (si veda anche D. Lasc-R. Lasc. [5])

Aggiungo che in realtà è possibile modificare p fuori di V in modo che le curve integrali di H_{p_V} uscenti da punti di $(p^{-1}(0)\backslash\Sigma)\cap V$ e che lasciano la scatola V non vi rientrino più.

Un caso intermedio, prima di considerare il caso 2, è il seguente. Supponiamo che sia verificata

H_4) Σ è una varietà simplettica di codimensione 2ℓ, $\ell\geq 1$, e $\forall\rho\in\Sigma$, $sp(F(\rho))\cap(iR\backslash\{0\}) = \emptyset$

In tal caso si può dimostrare quanto segue (cfr. Sjöstr. [7]).

<u>Teorema 2.</u> Sia $\rho \in \Sigma$ e denotiamo con $\Lambda_+(\rho)$, $\Lambda_-(\rho) \subset T_\rho T^*X$ i sottospazi isotropi (i.e. $\Lambda_\pm(\rho) \subset (\Lambda_\pm(\rho))^\sigma$) ℓ-dimensionali i cui complessificati sono le somme degli autospazi generalizzati (complessi) corrispondenti agli autovalori λ di $F(\rho)$ con $\mathrm{Re}\lambda > 0$ e $\mathrm{Re}\lambda < 0$ rispettivamente. (Ovviamente $\Lambda_+(\rho) \oplus \Lambda_-(\rho) = (T_\rho \Sigma)^\sigma$).

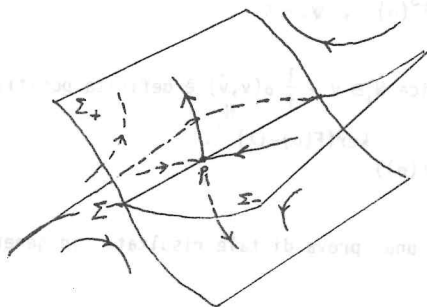
Allora in un intorno conico U di ρ esistono due sottovarietà coniche involutive Σ_+, Σ_- di codimensione ℓ tale che $\Sigma = \Sigma_+ \cap \Sigma_-$, $\Sigma_+ \cup \Sigma_- \subset \Sigma'$, $\Sigma_\pm$ sono invarianti per H_p, $T_{\rho'}\Sigma_\pm = T_{\rho'}\Sigma \oplus \Lambda_\pm(\rho')$, $\forall \rho' \in \Sigma \cap U$.

Inoltre possiamo trovare coordinate simplettiche $(x', x'', \xi', \xi'') \in T^*(R^k_{x'} \times R^\ell_{x''}) \setminus o$ centrate in ρ per cui Σ ha equazioni $x'' = \xi'' = 0$, Σ_+ (risp. Σ_-) ha equazioni $\xi'' = 0$ (risp. $x'' = 0$).

Il simbolo principale p in tali coordinate è della forma:

$$p(x,\xi) = \langle A(x',\xi')x'',\xi''\rangle + |\xi|^2 o(d^3_\Sigma), \tag{2.8}$$

essendo A una matrice reale $\ell \times \ell$, dipendente in modo C^∞ da x', ξ' e positivamente omogenea di grado 0 in ξ'. La restrizione di $F(\rho)$ a $(T_\rho \Sigma)^\sigma \simeq N_\rho \Sigma$ è $\begin{pmatrix} A(\rho) & 0 \\ 0 & -{}^tA(\rho) \end{pmatrix}$ e gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ di A sono precisamente gli autovalori di $F(\rho)$ con parte reale >0.

Si può allora dimostrare abbastanza facilmente che entro U le curve integrali di H_p uscenti da punti di Σ_- (risp. Σ_+) tendono a Σ per $t \to -\infty$) e che le curve integrali uscenti da punti di $p^{-1}(0) \setminus (\Sigma_+ \cup \Sigma_-)$ non hanno punti limite su Σ.

Un esempio tipico è il seguente (m=1):

$$p=\sum_{k=1}^{q}\omega_k x_k \xi_k + \sum_{j=1}^{r}[\mu_j(x_{q+2j-1}\,\xi_{q+2j-1} + x_{q+2j}\,\xi_{q+2j}) +$$

$$+\ \nu_j(x_{q+2j}\,\xi_{q+2j-1} - x_{q+2j-1}\,\xi_{q+2j})]$$

con $\omega_k>0$ $\forall k$, $\mu_j,\nu_j>0$ $\forall j$. In tal caso $\ell= q+2r$ e

$$sp(F) = \{0,\omega_1,\ldots,\omega_q\ ,\ \mu_1\pm i\nu_1,\ldots,\mu_r\pm i\nu_r,-\mu_1\pm i\nu_1,\ldots,-\mu_r\pm i\nu_r\}$$

così $\Sigma_+=\{\xi_1=\ldots=\xi_{q+1}=\ldots=\xi_{q+2r}=0\}$, $\Sigma_-=\{x_1=\ldots=x_q=x_{q+1}=\ldots=x_{q+2r}=0\}$.

La dimostrazione del T. 2 è un grosso lavoro ottenuto modificando opportunamente risultati noti in teoria dei sistemi dinamici (teorema della varietà stabile, Cfr. Abrham-Marsden [1]).

Per il Caso 2, in generale, cioè quando $sp(F(\rho))\cap(iR\setminus\{0\})\neq\emptyset$ ed esistono autovalori di $F(\rho)$ con parte reale $\neq 0$, non conosciamo risultati generali di microstruttura per p vicino a Σ.

Tuttavia, poiché gli autovalori di $F(\rho)$ con parte reale $\neq$ sono stabili al variare di ρ pensiamo che microlocalmente p si possa esprimere come somma dei 2 modelli (2.7) e (2.8) almeno se sono soddisfatte le seguenti ipotesi:

i) $\ker F^2(\rho) = \ker F^3(\rho)$, $\forall\rho\in\Sigma$

ii) La forma quadratica $W_+ \ni v \to \frac{1}{i}\sigma(v,\bar{v})$ è definita positiva su

$$W_+ = \bigoplus_{\lambda>0,\, i\lambda\in sp(F(\rho))} \ker(F(\rho)-i\lambda)^{N_\lambda}.$$

Purtroppo non abbiamo ancora una prova di tale risultato, in generale.

3. TERMINI D'ORDINE INFERIORE. STIME DELL'ENERGIA

Un procedimento per provare risultati di propagazione è quello di provare opportune stime microlocali dell'energia, e cioè risultati di unicità microlocale. Tale procedimento è stato usato per primo da Ivrii (Cfr. Iv. [3]), per metodi più costruttivi si veda ad es. B. Lasc.-Sjöstr [4].

L'idea guida è di provare stime di tipo Carleman per P (Cfr. [Hö, Vol. 4, Cap. XXVIII]).

Si fissino:

un simbolo reale $e(x,\xi)\in S^1(X)$, $e>0$, $\frac{1}{e}\in S^{-1}(X)$,

un simbolo reale $s(x,\xi)\in S^\circ(X)$, limitato

e si consideri l'operatore pseudo-differenziale $e(x,D)^{s(x,D)}$ con simbolo $e(x,\xi)^{s(x,\xi)}$.

Si fa poi il sandwhich

$$\tilde{P}(x,D) = e(x,D)^{s(x,D)}[P(x,D)e(x,D)^{-s(x,D)}]$$

Si trova, modulo errori controllabili

$$\tilde{P} = P-[P,s]\omega - s[P,\omega] \quad , \quad \omega(x,D) = \log e(x,D) \tag{3.1}$$

Scritto P nella forma $P = P_2 + iP_1$, $P_2 = P_2^*$ d'ordine 2 e $P_1 = P_1^*$ d'ordine 1 si trova allora la decomposizione autoaggiunta

$$\tilde{P} = A + iB$$

$A = P_2$, modulo termini d'ordine 0

$B = P_1 + i[P,s]\omega + is[P,\omega]$, modulo termini d'ordine 0

Se a è un qualunque operatore d'ordine con simbolo principale reale si ha allora la stima a priori, per $u \in C_0^\infty(K)$, $K \subset\subset X$,

$$C\{|\tilde{P}u|_0^2 + |u|^2_{\frac{1}{2},1}\} \geq \mathrm{Re}\,(Gu,u) \tag{3.2}$$

dove:

$$G = R^*R + i[P,R] + aP\omega$$

$$R = P_1 + is[P,\omega] + i[P,s]\omega$$

e $|\cdot|_0$ (risp. (,)) è la norma (risp. il prodotto scalare) in L^2, mentre

$$|u|^2_{t,r} = |(1+|\xi|^2)^{t/2}(\ln(1+|\xi|))^r\hat{u}(\xi)|_0^2\ , \quad u \in C_0^\infty.$$

Un calcolo esplicito mostra che

$$\sigma(R) = \sigma_1(P_1) + \{p,s\}\omega + s\{p,\omega\} \quad \text{mod. termini d'ordine } 0$$

$$\sigma(G) = \sigma(R)^2 + (\{p,\{p,s\} + a_0\})\omega + \{p,\sigma_1(P_1)\}$$

$$+ \{p,\{p,\omega\}\}s + 2\{p,s\}\{p,\omega\}$$

Si noti che $\sigma_1(P_1)$ = Parte immaginaria del simbolo sottoprincipale di P.

Ora si osserva che si può sempre scegliere $e(x,\xi)$ ed $s(x,\xi)$ in modo che $\{p,\{p,\omega\}\}$ e $\{p,\{p,s\}\}$ siano nulle al 2° ordine su Σ.

A questo punto facciamo l'ipotesi che $\sigma_1(P_1)|_\Sigma \neq 0$.

Se a_0 ed s sono tali che si abbia

$$\begin{cases} a_0 + \{p,\{p,s\}\} \geq C\ |\xi|^2\ d_\Sigma^2 \\ |\{p,s\}| \leq C'\ |\xi| d_\Sigma \\ |\{p,\sigma_1(P_1)\}| \leq C''\ |\xi|^2 d_\Sigma \end{cases}$$

con

$$C|\sigma_1(P_1)| > |\xi| C'C'' \tag{3.3}$$

allora è possibile provare che su un intorno conico di Σ si ha la stima

$$\sigma(G)/|\xi|^2 \geq \varepsilon\ \omega(x,\xi)^{-1} + \varepsilon\ \omega(x,\xi) d_\Sigma^2 \quad , \quad \varepsilon>0$$

Di qui non è difficile provare che se β è un operatore d'ordine 0 con supporto co nico disgiunto da Σ e se γ è un qualunque operatore d'ordine 0 e a simbolo nullo su Σ, esiste una costante opportuna C per cui

$$C(G + \beta^*\beta\Delta) - \omega^{-1}\Delta - \gamma^*\omega\gamma\Delta$$

è positivo e quindi, dalla stima sharp di Gärding si deduce

$$|u|_{1,-1/2} + |\gamma u|_{1,1/2} \leq C[|\tilde{P}u|_0 + |u|_0 + |\beta u|_{1,1}] \tag{3.4}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(K)$, $K \subset\subset X$.

Dalla stima (3.4) usando il Lemma di Friedrichs si trova un risul-

tato di regolarità parziale del tipo:

Se $v \in \mathscr{D}'(X)$, $WF(v) \subset$ in un intorno conico opportuno di Σ e $Pv \in H^{s,o}_{loc}(X)$ allora $v \in H^{s+1,-1/2}_{loc}(X)$ e $\gamma v \in H^{s+1,1/2}_{loc}(X)$.

A questo punto si può enunciare un teorema di propagazione della regolarità.

Teorema 3. Supponiamo di avere (3.3) e siano $\Sigma_{\pm}$ le varietà repulsive ed attrattive del Teorema 2.

Sia $\rho_o \in \Sigma$, $u \in \mathscr{D}'(X)$ e si supponga

i) $\rho_o \notin WF(Pu)$

ii) $\exists$ un intorno conico Γ di ρ_o per cui

$$WF(u) \cap \Gamma \cap \{\rho | s(\rho) > s(\rho_o)\} \cap (\Sigma_+ \cup \Sigma_-) = \emptyset$$

Allora $\rho_o \notin WF(u)$.

Di tale Teorema 3 abbiamo una dimostrazione nel caso in cui valgono H_1, H_2, H_3) o H_1), H_2), H_4), ma la prova non è completa nel caso 2, generale.

Diamo un esempio di applicazione del Teorema 3.

Scriviamo

$$R^n_x = R^1_{x_1} \times R^k_{x'} \times R^n_{x''} \times R^r_{x'''} \times R^{n-(k+h+r+1)}_y$$

e si consideri su R^n l'operatore P con simbolo principale

$$p(x,\xi) = \omega\, x_1\xi_1|\eta| + |\xi'|^2 + |\xi''|^2 + \sum_{j=1}^{r} \mu_j({\xi'''_j}^2 + {x'''_j}^2|\eta|^2),\ \mu_j>0,\ \omega>0.$$

In tal caso

$$\Sigma = \{(x,\xi)|\ x_1 = \xi_1 = 0,\ \ \xi' = 0,\ \xi'' = 0,\ \ \xi''' = x''' = 0,\ \eta \neq 0\}$$

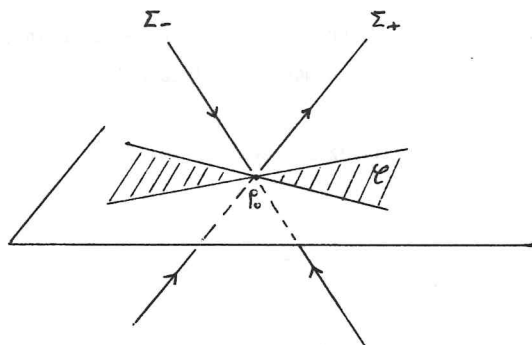
Sia $\rho_0 = (x_1=0,\ x'_0, x''_0, x'''=0,\ y_0;\ \xi_1=0,\ \xi'=0,\ \xi''=0,\ \xi'''=0,\ \eta_0) \in \Sigma$.

Poniamo

$$\mathscr{C} = \{(x,\xi)|x_1=0, x'''=0\ y=y_0,\ \xi_1=0,\ \xi'=0,\ \xi''=0,\ \xi'''=0,\ \eta=\eta_0,$$
$$|x'-x'_0| \geq |x''-x''_0|\} \subset \Sigma$$

$$\Sigma_+ = \{(x,\xi)|\ \ \xi_1=0,\ \xi'=0,\ \xi''=0,\ \xi'''=x'''=0,\ \eta \neq 0\}$$

$$\Sigma_- = \{(x,\xi)|\ \ x_1=0,\ \xi'=0,\ \xi''=0,\ \xi'''=x'''=0,\ \eta \neq 0\}$$

Allora possiamo dimostrare che se $u \in \mathscr{D}'$, $\rho_0 \notin WF(Pu)$, e se per un intorno conico Γ di ρ_0 si ha $WF(u) \cap \Gamma \cap (\Sigma_+ \cup \Sigma_-) \cap \mathscr{C} = \emptyset$, allora $\rho_0 \notin WF(u)_0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. ABRAHM-J. MARSDEN: Foundations of Mechanics, Benjamin/publ. company 1978.

[2] L. HÖRMANDER: The analysis of linear partial differential operators, Vol. 1-4. Springer 1983.

[3] V. IVRII: Wave fronts of solutions of certain pseudo-differential equations, Trans. Moscow Math. Soc., 1, (1981), 49-86.

[4] B. LASCAR-J. SJÖSTRAND: Equation de Schrödinger et propagation des singularités. Astérisque.

[5] B. LASCAR-R. LASCAR: Propagation des singularités...Duke Math. J. Vol. 53 (1986), 945-981.

[6] M. PETRINI-V. SORDONI: Lavoro in preparazione.

[7] J. SJOSTRAND: Analytic wave front sets and operators with multiple characteristics. Astérisque.